ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΟΜΑΔΩΝ:

$\mathbb{R}^* \ni r = \pm|r|$ άρα $\mathbb{R}^*$ ισόμορφη με το γινόμενο δύο υποομάδων της των $\mathbb{R}^+$ και $\{-1,1\}$. Δηλαδή:
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^+ \times \{-1,1\}$ ευθύ γινόμενο

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ομάδα G λέγεται εσωτερικό ευθύ γινόμενο των H και $K \leq G$ εάν
H και $K \trianglelefteq G$, $G = HK$ και $H \cap K = \{e\}$
Συμβολισμός εσωτερικού ευθέως γινομένου $G = H \times K$

Ισχύει $(\forall \gamma \in G)(\exists!\, a \in H \wedge b \in H) : \gamma = ab \wedge ab = ba$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $G = H \times K$, $H' = \{(a,1) / a \in H\}$ και
$K' = \{(1,b) / b \in K\}$. Τότε ισχύουν τα εξής:

1) $H' \cong H$, $K' \cong K$
2) $H' \lhd O$, $K' \lhd O$
3) $O = H'K'$ και $H' \cap K' = \{(1,1)\}$
4) $O = H' \times K'$

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια ομάδα O καλείται εσωτερικό ευθύ γινόμενο των υποομάδων της H_i, $i \in I$ εαν $H_i \lhd O$
Η O γεννάται απο τις H_i και
$H_i \cap \langle H_j : j \in I - \{i\} \rangle = \{e\}$, $i \in I$
Γραφουμε $O = \prod_{i \in I} H_i$
⊛ παρατηρηση: το $\langle H_j : j \in I - \{i\} \rangle$ = ‹υποομαδα που γεννάται απο τις υπόλοιπες›

Προσοχη!
το γινόμενο δεν περιεχει ακολουθιες στοιχείων της H_i αλλα πεπερασμενου πληθου γινομενα στοιχείων της H_i

ΟΡΙΣΜΟΣ:
Η O καλείται εξωτερικό ευθύ γινόμενο των H_i ομάδων εαν είναι το καρτεσιανό γινόμενο:
$O = \times_{i \in I} H_i$ Τα στοιχεία της O είναι ακολουθιες $(h_1, h_2, \ldots)$, $h_i \in H_i$ και η πράξη είναι κατά συντεταγμένες

• Αν $|I| < \infty$ τοτε $\prod_{i \in I} H_i \cong \times_{i \in I} H_i$
1) Αν $O = H \times K \Rightarrow$ Η O καθορίζεται πλήρως απο αυτές
2) Αν $O = H \rtimes K$ και $H \lhd O$ τοτε O δεν καθορ. πληρ. απο αυτες

ΟΡΙΣΜΟΣ
Η O λεγεται ημιευθύ γινόμενο των υποομαδων H, K εαν $H \lhd O$, $O = HK$ και $H \cap K = \{e\}$

Παρατήρηση: 1) Εφόσον $H \cap K = \{e\} \Rightarrow K = O/H$

2) Ορίζεται $\varphi : O \to Aut(O)$ τύπου:

$\varphi(a) \in Aut(O) \iff \varphi(a)(b) = \tau_a(b) = aba^{-1}$

Θέλουμε τα $a \in O$ ώστε $\varphi(a) = 1 \iff aba^{-1} = b,\ b \in O$

Άρα, $a \in Z(O)$: $\ker\varphi = Z(O) \Rightarrow \bar{\varphi} : O/\ker\varphi \xrightarrow{\cong} \varphi(O) = Inn(O)$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω O ημιευθύ γινόμενο των H και K

1) Η απεικόνιση $\varphi : K \to Aut(H)$ τύπου

$\varphi(k) \in Aut(H) \Rightarrow \varphi(k)(a) = \beta a \beta^{-1} \in H \quad , \forall a \in H,\ b \in K$

Είναι ομομορφισμός

2) Κάθε στοιχείο γ της O έχει μοναδική αναπαράσταση $\gamma = ab$ με $a \in H$ και $b \in K$

3) Το γινόμενο δίνεται από $(\alpha, b)(\delta, \zeta) \to (\alpha\varphi(b)\varphi(\delta), b\zeta)$

Εσωτερικό γινόμενο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1) $H \triangleleft O$, φ ομομορφισμός ομάδων $\varphi(\beta\beta') = \varphi(b)\varphi(b')$

2) Από ορισμό (αλλά και ως άσκηση έχει γίνει)

3) $(\alpha, b)(\delta, \zeta) = \alpha b \delta \zeta$

και $(\alpha\,\varphi(b)(\delta), b\zeta) = \alpha\,\varphi(b)\,\delta\, b\,\zeta = a b \delta b^{-1} b \zeta = \alpha b \zeta \delta$

Παράδειγμα:

Έστω $O = \Sigma_3 = \{e, f, f^2, g, fg, f^2g\}$.

Η $H \leq O$ με $H = \langle f \rangle \cong \mathbb{Z}_3$ και $K \leq O$ με $K \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_2$

και $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3^k \cong \mathbb{Z}_2$.

Έστω φ αρχικά η ταυτοτική τότε το εσωτ. γινόμενο

$(f^i g^t)(f^j \cdot g^s) = f^i \varphi(g^t)(f^j)\, g^t g^s = f^i f^j g^{t+s} = f^{i+j} g^{t+s}$

Δηλ. όταν φ ταυτοτική τότε εσωτερικό-εξωτερικό των H και K ταυτίζονται άρα $H \times K \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6$

Έστω τώρα η μη τετριμμένη περίπτωση η φ να είναι: $\varphi(g)(f) = f^2$ και ας δούμε το γινόμενο

$(fg)(fg) = f\varphi(g)(f)\, g g = f f^2 g^2 = e$

$(fg)(f^2g) = f\varphi(g) f^2 g g = f f g^2 = f^2$

$(f^2g)(f\cdot g) = f^2\varphi(g)(f)\,g g = f^2 f^2 g^2 = f$
$(f^2g)(f^2g) = f^2\varphi(g)(f)\,g g = f^2 f^2 g^2 = e$
$(fe)(fg) = f\varphi(e)(f)g = f^2 g$
$(f^2g)(f1) = f^2\varphi(g)(f)g = f^2f^2g = fg$
Είναι δηλ. το γινόμενο της Σ_3
αλλιώς υπάρχουν μόνο δύο ομάδες τάξης 6

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω H και K ομάδες και $\varphi: K \xrightarrow{\cong} Aut(H)$.
Στο σύνολο $H \times K$ ορίζουμε πράξη:
$(\alpha,\beta)(\gamma,\delta) = (\alpha\varphi(\beta)(\gamma), \beta\delta)$

ΛΗΜΜΑ/ΘΕΩΡΗΜΑ:
Το σύνολο $H\times K$ με την προηγούμενη πράξη αποτελεί ομάδα G την οποία συμβολίζουμε $G = H \rtimes_\varphi K$. Επίσης, $H' \triangleleft G$ και $K' \cong G/H'$ τέτοια ώστε
$H' = \{(\alpha,1) \mid \alpha \in H\}$ & $K' = \{(1,\beta) \mid \beta \in K\}$
Απόδειξη
(Από το βιβλίο είναι αναλυτική)

Π.χ
$H = \mathbb{Z}_7 = C_7$, $K = \mathbb{Z}_3 = C_3$
$Aut(C_7) \cong C_6$ και $\varphi: K \to Aut(H)$
$C_3 \to Aut(C(7)) \cong C_6$
$\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6$
γεννήτορες a, a^2, ή $1, 2 \bmod 3$
διότι γεννήτορας $\mapsto$ γεννήτορα
$\varphi(7) = 6$ $\quad 1,2,3,4,5,6$
$o(\varphi(a)) \mid o(a) \Rightarrow o(\varphi(a)) = 3$ το οποίο είναι αυτομορφισμός στη $\mathbb{Z}_7$
$\exists$ ρίζα x στο $\mathbb{Z}_7 \Leftrightarrow o(x) = \varphi(7) = 6$
$\alpha \to 3\alpha \to 9\alpha \to 2\alpha \to 6\alpha \to 4\alpha \to 5\alpha \to \alpha$

$\varphi: \mathbb{Z}_3 \to Aut(\mathbb{Z}_7)$

$\mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$

$a \mapsto 2a$

$\varphi: \mathbb{Z}_3 = \langle b \rangle \to Aut\, \mathbb{Z}_7 = \langle \alpha \rangle, \ \alpha^7 = e = b^3$

$e \longmapsto x^2$

$(a^i, b^k)(a^j, b^l) = (a^i \varphi(b^k)(a^j), b^{k+l})$

$(\alpha, b)(\alpha, b) = (\alpha \varphi(b)(\alpha), b^2) = (\alpha \alpha^2, b^2) = (\alpha^3, b^2)$

Η ομάδα $\mathbb{Z}_7 \times_\varphi \mathbb{Z}_3$ περιγράφεται απο

$\mathbb{Z}_7 \trianglelefteq G = \mathbb{Z}_7 \times_\varphi \mathbb{Z}_3, \ |G| = 37$

ΛΗΜΜΑ: Εστω $\varphi: G \to K$ ομομορφ. και $H \trianglelefteq G$ με $\varphi(H) \leq Y$ με $Y \trianglelefteq K$ τοτε εχουμε ομομορφισμο $\bar{\varphi}: G/H \to K/Y$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Εστω $H \trianglelefteq G$, ομομορφ. $\varphi: G \to Aut(H)$ τοτε ο φ επαγει ομομορφ. ως εξής

$\bar{\varphi}: G/H \to Aut(H)/Inn(H) \cong Out(H)$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Εστω $\varphi: K \xrightarrow{\cong} Aut(H)$.

Τοτε $\exists\, G = H \times_\varphi K$ ομαδα, $H \trianglelefteq G$ και $K \cong G/H$

Επίσης ο επαγόμενος ομομορφισμος $\bar{\varphi}$

$\bar{\varphi}: K \to Out(H)$ είναι η σύνθεση μεσω της προβολης $\pi: Aut(H) \to Out(H)$

ΠΧ

$K = \mathbb{Z}_2$ και $H = \mathbb{Z}_4$. Εστω $\varphi: \mathbb{Z}_2 \to Aut\, \mathbb{Z}_4$

$\varphi(0) = 1$ και $\varphi(1) = \psi$ με $\psi(a) = a^{-1}$ $\forall a \in \mathbb{Z}_4$

Δηλ. ($\varphi(b) = \varphi(1) = \psi: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ τυπου $a \mapsto -a$ προσθ. ή $a \mapsto a^{-1}$ πολλαπλασ) το γινόμενο $O = \overset{\langle a\rangle}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}_4}} \times_\varphi \overset{\langle b\rangle}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}_2}}$

$(a,b)(a,b) = (a\varphi(b)(a), b^{-1}b) = (aa^{-1}, e) = (e,e)$

$o(ab) = 2 \quad abab = e \Rightarrow bab = a^{-1}$ διεδρική ομάδα

$(a,b)(a^2,e) = (a\varphi(b)(a^2), b) = (aa^{-2}, b) = (a^{-1}, b)$

$aba^2 = a^{-1}b$ και $ba^2b = a^{-2} \Rightarrow O = \mathbb{Z}_4 \times_\varphi \mathbb{Z}_2 = D_4$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν υποθέσουμε $O = H \times_\varphi K$ και $O = H \times_\varphi K$ ώστε $f \in Aut(H)$ με $\varphi'(b) = f\varphi(b)f^{-1}$, $\forall b \in K$. Τότε, η $: H \times_\varphi K \to H \times_{\varphi'} K$ τύπου $(\gamma, b) = (f(\gamma), b)$ με $\gamma \in H$ και $b \in K$ ισομορφισμός

ΠΟΡΙΣΜΑ:

Αν $\varphi = \varphi' f$ με $f \in Aut(K)$ τότε η απεικόνιση $\psi : H \times_\varphi K \to H \times_{\varphi'} K$ τύπου $\psi(a,b) = (a, f(b))$ ισομορφισμός